

R. Vogel

Fließen von Selbstverdichtendem Beton - Das Reibungsgesetz für den ebenen Spalt (I) -

Einleitung

Zur Berechnung des Druckverlustes bei der Förderung von Flüssigkeiten in Rohren wird in der Regel die Beziehung

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{\rho}{2} \bar{c}^2 \cdot \sum \zeta \\ &= \frac{\rho}{2} \bar{c}^2 \cdot [\lambda] \cdot \sum [L/D]_{\text{äq.}}\end{aligned}\quad (1)$$

benutzt. Die Anwendung dieser setzt voraus, dass neben den geometrischen Abmessungen auch die das Fördermedium charakterisierenden Stoffdaten bekannt sind. Hierzu gehören Dichte und Viskosität; wobei letztere über $\lambda(Re)$ Einfluss nimmt. Wenn allerdings – wie bei Mörtel und Beton – weitere Materialausgaben beachtet werden müssen, muss das Reibungsgesetz $\lambda(Re)$ dementsprechend erweitert werden.

Kann mit dem *BINGHAM*-Fließgesetz eine ausreichende Materialbeschreibung erfolgen, wenn also außer ρ und η auch noch τ_0 eine Rolle spielt, so muss der Reibungsverlust mit Hilfe von $\lambda(Re, Bm)$ oder auch $\lambda(Re, He)$ ermittelt werden. Aus dem Dargelegten folgt allgemeiner ausgedrückt: Jeder weitere Materialparameter zwingt zu einer weiteren dimensionslosen Kenngröße im Reibungsgesetz.

Liegen laminare Strömungsverhältnisse vor, so braucht nicht unbedingt Gl.(1) zur Berechnung des Reibungsverlustes verwendet werden. Aus dem Gesetz von *HAGEN-POISEUILLE* folgt nämlich

$$\Delta p = \frac{\eta \cdot \bar{c}}{D} \cdot [Ha] \cdot \sum [L/D]_{\text{äq.}} \quad (2)$$

Da in diesem Sonderfall die Dichte keine Rolle spielt, reduziert sich das Reibungsgesetz um eine dimensionslose Größe. Anstelle von $\lambda(Re)$ tritt Ha bzw. für $\lambda(Re, Bm)$ steht nun $Ha(Bm)$. Die damit erreichte Vereinfachung des Reibungsgesetzes gestattet die Berechnung des Druckverlustes überschaubarer, ohne dass ein Erkenntnisverlust hingenommen werden muss. Voraussetzung ist allerdings die Kenntnis von Ha bzw. $Ha(Bm)$.

Verwendet man Ergebnisse neuester Untersuchungen [5], wonach die Fließkurve von Selbstverdichtendem Beton und Mörtel mit Hilfe von

$$\begin{array}{l} \text{Bei pseudoplast. Materialverhalten (+)} \\ \text{bei Dilatanz (-)} \end{array} \quad \tau = \tau_0 + \eta_0 \cdot \dot{\gamma} \cdot \frac{1}{\left\{ 1 \pm \frac{\eta_0}{2 \cdot \sigma} \cdot \dot{\gamma} \right\}} \quad (3)$$

abgebildet werden sollte, so ist eine Erweiterung des Reibungsgesetzes zu erwarten, um den Einfluss des Material-Moduls σ zu berücksichtigen. Wird dieser in der dimensionslosen Kenngröße Kg fixiert, so ist das Reibungsgesetz in der Art $Ha(Bm, Kg)$ vorstellbar.

Sowohl die Ableitung eines Reibungsgesetzes, als auch die darauf aufbauende Druckverlustberechnung etc. sind an bestimmte geometrische Voraussetzungen gebunden und zwar in erster Linie an die Form des Strömungsquerschnittes. In den jeweiligen mathematischen Beziehungen wird dies durch das Symbol D verdeutlicht, welches grundsätzlich für $D = D_{hydr.} = 4 \cdot A/U$ steht. In den nachfolgenden Überlegungen soll im Vordergrund ein Strömungsquerschnitt betrachtet werden, der dem Einbau des SVB in die Schalung für Wandelemente o.ä. wiedergibt.

Verwendete Kenngrößen-Definitionen (allgemeine Form)

$Bm = \frac{\tau_0 \cdot D}{\eta \cdot \bar{c}}$	[-]	BINGHAM -Zahl	
$Ha = \frac{\Delta p \cdot D}{\eta \cdot \bar{c} \cdot L/D}$	[-]	HAGEN -Zahl	$2 \cdot Ha = \lambda \cdot Re$
$He = \frac{\tau_0 \cdot D^2 \cdot \rho}{\eta^2}$	[-]	HEDSTRÖM -Zahl	$He = Re \cdot Bm$
$Kg = \frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{\sigma \cdot D}$	[-]		
$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \cdot \bar{c}^2 \cdot L/D}$	[-]	Reibungsbeiwert	
$Re = \frac{\bar{c} \cdot D \cdot \rho}{\eta}$	[-]	REYNOLDS -Zahl	

Ausgangsposition

Die eindimensionale, stationäre Strömung in einem horizontalen Rohr wird durch die bekannte Differentialgleichung¹⁾

$$dp + \tau \cdot \frac{u \cdot dl}{a} = 0 \quad (4)$$

beschrieben. Unter Beachtung von Gl.(3) und Einführung von $(a/u) = r_{hydr}$ erhält man daraus

$$dp + \left\{ \tau_0 + \frac{\eta_0 \cdot \dot{\gamma}}{1 \pm \frac{\eta_0}{2\sigma} \cdot \dot{\gamma}} \right\} \cdot \frac{1}{r_{hydr}} dl = 0$$

Werden weiterhin die geometrischen Größen mit R_{hydr} und die Geschwindigkeit über die mittlere \bar{c} relativiert, so folgt

$$dp + \left\{ \tau_0 + \frac{\frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{R_{hydr}} \cdot \frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}}{1 \pm \frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{R_{hydr}} \cdot \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}} \right\} \cdot \frac{R_{hydr}}{r_{hydr}} \cdot d\left(\frac{l}{R_{hydr}}\right) = 0$$

Wird nun noch durch $\left\{ \frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{R_{hydr}} \cdot \frac{R_{hydr}}{r_{hydr}} \cdot d\left(\frac{l}{R_{hydr}}\right) \right\}$ dividiert und sortiert, so ist

$$\frac{r_{hydr}}{R_{hydr}} \cdot \left[\frac{dp}{\frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{R_{hydr}} \cdot d(l/R_{hydr})} \right] + \left[\frac{\tau_0 \cdot R_{hydr}}{\eta_0 \cdot \bar{c}} \right] + \frac{\frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}}{1 \pm \left[\frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{2\sigma \cdot R_{hydr}} \right] \cdot \frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}} = 0$$

Die Ausdrücke in [...] -Klammern sind dimensionslose, unabhängige Veränderliche. Sie können auch in Form der üblichen Kenngrößen-Kürzel geschrieben werden; denn es ist

$$\frac{-\frac{dp}{dl} \cdot R_{hydr}^2}{\eta_0 \cdot \bar{c}} \cdot 16 = \mathbf{Ha} \triangleq \frac{\Delta p \cdot D_{hydr}^2}{\eta \cdot \bar{c} \cdot L} \quad \text{sowie} \quad \frac{\tau_0 \cdot R_{hydr}}{\eta_0 \cdot \bar{c}} \cdot 4 = \mathbf{Bm} \triangleq \frac{\tau_0 \cdot D_{hydr}}{\eta \cdot \bar{c}}$$

Fügt man eine weitere hinzu,

$$\frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{2\sigma \cdot R_{hydr}} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{Kg} = \frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{\sigma \cdot D_{hydr}},$$

so erhält man für das anstehende Problem anstelle von Gl.(4) die Diff.-Gleichung in der Form

$$-\frac{\mathbf{Ha}}{16} \cdot \frac{r_{hydr}}{R_{hydr}} + \frac{\mathbf{Bm}}{4} + \frac{\frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}}{1 \pm 2 \cdot \mathbf{Kg} \cdot \frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})}} = 0 \quad (5)$$

Oder auch nach Umstellung

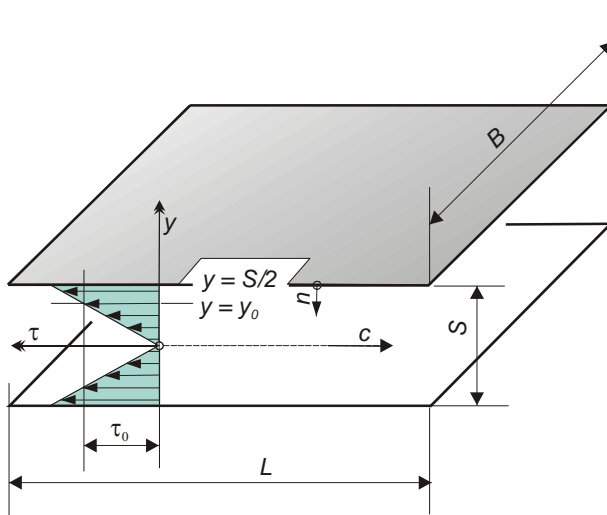
¹⁾ Albring, W. Angewandte Strömungslehre, Verlag Steinkopff, Dresden, 4.Auflage 1970, S.270 ff.

$$\frac{d(c/\bar{c})}{d(n/R_{hydr})} = \frac{\frac{Ha}{16} \cdot \frac{r_{hydr}}{R_{hydr}} - \frac{Bm}{4}}{1 \mp 2 \cdot Kg \cdot \left\{ \frac{Ha}{16} \cdot \frac{r_{hydr}}{R_{hydr}} - \frac{Bm}{4} \right\}} \quad (6)$$

Mit dieser Beziehung wird die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsquerschnitt beschrieben. Sie ist abhängig von den Parametern: $Ha; Bm; Kg$ und dem Geometriesimplex r/R .

Laminare Strömung im ebenen, engen Spalt – Ableitung eines Reibungsgesetzes

Der Einbau des Selbstverdichtenden Betons in eine filigrane Wandschalung kann als Spaltströmung aufgefasst werden, wenn der Abstand der Schalung – der Spalt S – klein gegenüber der Spaltbreite B ist. Unter dieser Voraussetzung gilt mit den Abmessungen $L \times B \times S$ im Detail



$$\begin{aligned} R_{hydr} &= \frac{A}{U} = \frac{B \cdot S}{2 \cdot B + 2 \cdot S} \\ &= \frac{S}{2 \cdot (1 + S/B)} \rightarrow \frac{S}{2} \quad \text{und} \\ D_{hydr} &= \frac{4 \cdot A}{U} = 2 \cdot S \quad . \\ r_{hydr} &= \frac{a}{u} = y \quad \text{sowie} \quad n = -y \quad . \end{aligned}$$

Abb.1 Geometrie des Spaltes, Koordinaten und Spannungsverteilung

Führt man diese speziellen Ausdrücke in Gl.(6) ein, so erhält man nach Trennung der Veränderlichen

$$d\left(\frac{c}{\bar{c}}\right) = \frac{\frac{Bm}{2} - \frac{Ha}{4} \cdot \frac{y}{S}}{1 \mp Kg \cdot \left[\frac{Bm}{2} - \frac{Ha}{4} \cdot \frac{y}{S} \right]} \cdot d\left(\frac{y}{S}\right) \quad (7)$$

Um aus der Komplexität dieses Ausdrucks einfache Deutungen zu ermöglichen, sollen vorerst die beiden Spezialfälle verfolgt werden:

I. $Kg = 0$ bzw. $Kg \rightarrow 0$ führt zu
$$d\left(\frac{c}{\bar{c}}\right) = \left\{ \frac{Bm}{2} - \frac{Ha}{4} \cdot \frac{y}{S} \right\} \cdot d\left(\frac{y}{S}\right) \quad (8.1)$$

und dem für *BINGHAM*-Fluide gültigen Reibungsgesetz $Ha(Bm)$.

$$\text{II. } Bm = 0 \text{ führt zu } d\left(\frac{c}{\bar{c}}\right) = \frac{\frac{y}{S} \cdot d\left(\frac{y}{S}\right)}{\mp Kg \cdot \frac{y}{S} - \frac{1}{Ha/4}} \quad (8.2)$$

und der für struktur-viskose Fluide gültigen Lösung $Ha(Kg)$.

Spezialfall I :

Die Integration des Ausdrucks (8.1) führt zur Geschwindigkeitsverteilung im Spalt. Nach Bestimmung der Integrationskonstanten über die Randbedingung $c/\bar{c} = 0$ bei $y/S = 1/2$ erhält man

$$\frac{c}{\bar{c}} = \frac{Bm}{2} \cdot \left(\frac{y}{S} - \frac{1}{2}\right) - \frac{Ha}{8} \cdot \left\{ \left(\frac{y}{S}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\}. \quad (9)$$

Wegen der Fließgrenze τ_0 des Strömungsmediums ist die Gültigkeit dieser Beziehung auf den Spaltquerschnitt $y_0 \leq y \leq S/2$ begrenzt. Im Zentrum des Strömungsquerschnitts $0 \leq y \leq y_0$ bewegt sich der Strom als Pfropfen mit

$$\frac{c_0}{\bar{c}} = \frac{Bm}{2} \cdot \left(\frac{y_0}{S} - \frac{1}{2}\right) - \frac{Ha}{8} \cdot \left\{ \left(\frac{y_0}{S}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\}.$$

Da für $y/S \leq y_0/S$ außerdem $dc/dy = 0$ zutrifft, folgt aus Gl.(8.1)

$$Bm - \frac{Ha}{2} \cdot \frac{y_0}{S} = 0 \quad \text{oder auch} \quad \frac{y_0}{S} = 2 \cdot \frac{Bm}{Ha} \quad \text{und letztlich}$$

$$\frac{c_0}{\bar{c}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Bm^2}{Ha} - \frac{Bm}{4} + \frac{Ha}{32} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)_{\max}. \quad (10)$$

Mit den Ergebnissen Gln.(9 + 10) ist die Geschwindigkeitsverteilung im Spaltquerschnitt erfasst. Sie ist jedoch faktisch nicht verifizierbar, da für eine gegebene Bm -Zahl die Ha -Zahl nicht bekannt bzw. nur abschätzbar ist.

Mit den prinzipiellen Aussagen über den c -Verlauf kann die Erfassung von $Ha(Bm)$ über die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{c} erfolgen. Sie ergibt sich aus dem auf den Strömungsquerschnitt bezogenen Volumenintegral durch Summation von Kern- und Randbereich in folgender Weise

$$\bar{c} = c_0 \frac{2 \cdot y_0 \cdot B}{S \cdot B} + \int_{y_0}^{S/2} \frac{2 \cdot B \cdot c}{S \cdot B} \cdot dy \quad \text{bzw.} \quad 1 = 2 \cdot \frac{c_0}{\bar{c}} \cdot \frac{y_0}{S} + 2 \int_{y/S=y_0/S}^{y/S=1/2} \frac{c}{\bar{c}} \cdot d\left(\frac{y}{S}\right).$$

Fügt man nun noch die bekannten Ausdrücke für c_0/\bar{c} und y_0/S sowie c/\bar{c} ein, so erhält man

$$2 \frac{Bm^3}{Ha^2} - \frac{Bm^2}{Ha} + \frac{Bm}{8} + 2 \int_{y_0/S}^{1/2} \left\{ \frac{Bm}{2} \cdot \left(\frac{y}{S} - \frac{1}{2}\right) - \frac{Ha}{8} \cdot \left[\left(\frac{y}{S}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right\} \cdot d\left(\frac{y}{S}\right) = 1,$$

woraus nach Integration, Zusammenfassen und Ordnen das Reibungsgesetz

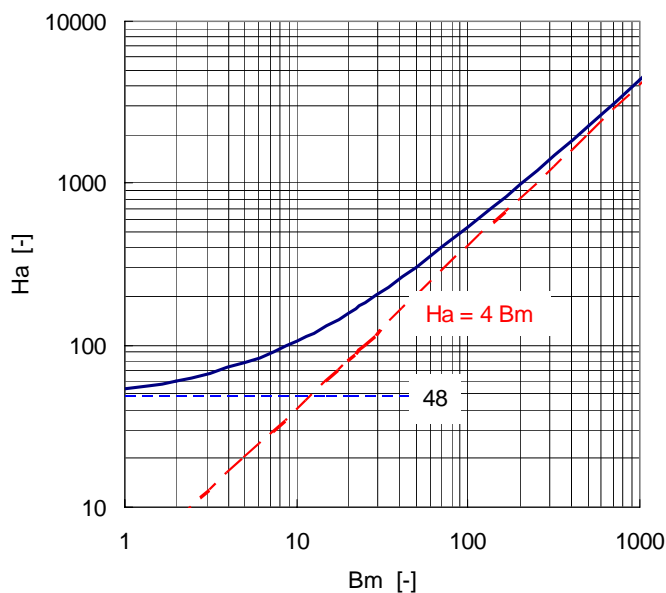
$$Ha = 48 \cdot \left[1 + \frac{Bm}{8} - \frac{2 Bm^3}{3 Ha^2} \right] \quad (11)$$

resultiert. Wie man sieht, ist danach die Ha -Zahl nur durch Iteration ermittelbar. In Abb.2 ist das Ergebnis einer solchen anwendungsbereit festgehalten. Sowohl Gl.(11) als auch diese Grafik machen zweierlei Aussagen deutlich:

Erstens: Für $Bm = 0$ – also $\tau_0 = 0$ sowie auch $(\eta \cdot \bar{c}) \rightarrow \infty$ – gilt $Ha = 48$. Der Reibungsverlust wird hier ausschließlich durch die Stoffkonstante $\eta_{pl} = \eta$ bestimmt.

Zweitens: Für schleichende Strömungsverhältnisse (sehr große Bm) nähert sich die HAGEN-Zahl der Asymptote $Ha = 4 \cdot Bm$. Dies folgt aus $y_0/S = 1/2 = 2 \cdot Bm/Ha$ (s.o.)

Der Reibungsverlust ist hier nur auf die stoffspezifische Größe τ_0 zurückzuführen, was durch die Pfropfenströmung zum Ausdruck kommt.



Bm	Ha
0	48,00
0,3	49,80
0,4	50,40
0,5	51,00
1	53,99
2	59,93
5	77,33
10	105,1
15	131,8
20	157,7
25	183,1
50	305,0
100	537,1
200	983,1
500	2275
1000	4380
2000	8528
5000	20820
10000	41150
20000	81620
40000	162300

Abb.2 Grafische Darstellung des Reibungsgesetzes für BINGHAM-Fluide

Die Herleitung des Reibungsgesetzes – Gl.(11) – erfolgte unter der Voraussetzung, dass das BINGHAM-Gesetz zur Beschreibung des Fließverhaltens des Materials ausreicht. Für SVB kann diese Wahl als gute Näherung akzeptiert werden.

Die Zuordnung von Ha zu einer gegebenen oder ausgewählten Bm -Zahl ist nun mit Hilfe von Gl.(11) oder auch nach Abb.2 möglich und damit auch die Berechnung des Druckverlustes im Spalt. In Abwandlung von Gl.(2) gilt hier

$$\Delta p = \frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{D_{hydr}} \frac{L}{D_{hydr}} \cdot Ha = \eta_{pl} \cdot \bar{c} \frac{L}{4 \cdot S^2} \cdot Ha \quad \text{oder auch} \quad \Delta p = \frac{\tau_0}{Bm} \cdot \frac{L}{2 \cdot S} \cdot Ha ,$$

wenn an Stelle von η_{pl} , – aus der *BINGHAM* -Definition folgend – $\frac{\tau_0}{Bm} \frac{2 \cdot S}{\bar{c}}$ gesetzt wird.

Um die Größenordnung des Druckverlustes zu erkennen, wurden beide Beziehungen benutzt, um einerseits $\Delta p(\eta_{pl})$, andererseits $\Delta p(Bm)$ zu berechnen. Setzt man einen SVB mit 16 mm Größtkorn voraus, der laut Stabilitätskriterium [2] eine Fließgrenze des SVM von $\tau_0 \geq 15$ Pa verlangt, so erhält man bei Beachtung von $(\tau_0)_{SVB} \approx 4 \cdot (\tau_0)_{SVM}$ das in Abb.3 festgehaltene Ergebnis. Es basiert auf der Annahme von $L/(2 \cdot S) = 10$ und der Schätzung $\bar{c} = 0,2$ m/s. Wie zu erwarten war, wächst der Druckverlust mit der plastische Zähigkeit des SVB. Für einen praktisch relevanten Wert von

$$\eta_{pl} \approx 30 \dots 40 \text{ Pa s}$$

(gelbe Markierung im Bild) wird danach ein Druckverlust in der Größenordnung von 1 bis 2×10^4 Pa ausgewiesen. Bemerkenswert ist, dass darin ein Anteil von weniger als 30% der Fließgrenze zuzuschreiben ist (siehe rosa Grenzlinie). Das Gewicht der Fließgrenze kann man auch aus der oberen Abszisse erkennen. Danach liegt die *Bm* -Zahl mit der gewählten SVB-Konfektion unter 1,0, womit die untergeordnete Bedeutung der Fließgrenze (im Hinblick auf den Druckverlust!) unterstrichen wird. Erst wenn die Viskosität wesentlich verringert wird, fällt der Fließgrenzen-Anteil ins Gewicht. Nach Abb.3 ist es aus der Sicht einer Druckverlustminderung durchaus lohnenswert, die plastische Zähigkeit des SVB zu senken.

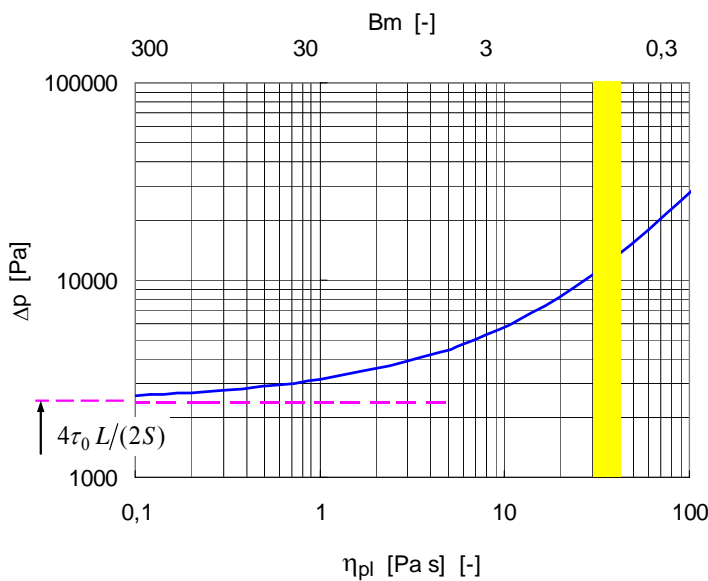


Abb.3 *Der Druckverlust im engen Spalt in Abhängigkeit von der plastischen Viskosität η_{pl} und der Fließgrenze τ_0 .*

lieh verringert wird, fällt der Fließgrenzen-Anteil ins Gewicht. Nach Abb.3 ist es aus der Sicht einer Druckverlustminderung durchaus lohnenswert, die plastische Zähigkeit des SVB zu senken.

Außer der Berechnung des Druckverlustes kann auch das Geschwindigkeitsfeld $c/\bar{c}(y/S)$ bzw. $c(y)$ auf der Grundlage von Gln.(9 + 10) ermittelt werden. Als Beispiel hierfür ist Abb.4 gedacht. Man erkennt dort den prägnanten Einfluss der *Bm* -Zahl. Für $Bm = 2$ weicht der Geschwindigkeitsverlauf – Pfropfenbereich $y/S \leq 0,067$ – nur wenig von dem bekannten parabolischen eines *NEWTON* -Fluids ab.

Liegt die *Bm* -Zahl in der Größenordnung von 200, so sind 80% des Spaltquerschnitts Pfropfen. Wird nun angenommen, dass SVB in ein Bauelement mit einem lichten Schalungsabstand (Spalt) von ca. 200 mm eingebracht wird, so beträgt die effektive Wandschichtdicke bei diesem Füllvorgang weniger als 20 mm. Handelt es sich um SVB mit einer Körnung von 16 mm, so ist es aus praxisnaher

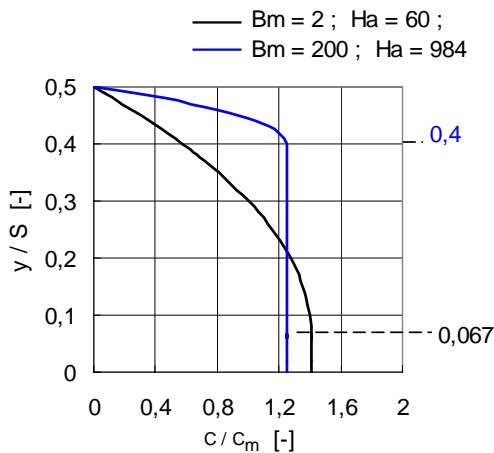


Abb.4 Geschwindigkeitsverteilung im Spaltquerschnitt für zwei verschiedene BINGHAM –Fluide. (c_m steht für \bar{c})

Sicht sehr wahrscheinlich, dass der SVB bereits bei dieser Bm -Zahl weitgehend als Pfropfen fließt. Zur Berechnung des Druckverlustes darf dann die einfache Beziehung $Ha = 4 \cdot Bm$ verwendet werden.

Schlussfolgerungen und Ausblick

Für laminare Strömung im ebenen Spalt wird ein Ansatz vorgestellt, der die Berechnung der Reibungsverluste für Fluide mit Fließgrenze ermöglicht. Grundlage hierfür bilden die dimensionslosen Kennzahlen

$$Ha = \frac{\Delta p}{\eta_{pl} \cdot \bar{c}} \frac{L}{D_{hydr}^2} ; \quad Bm = \frac{\tau_0 \cdot D_{hydr}}{\eta_{pl} \cdot \bar{c}} \quad \text{sowie} \quad Kg = \frac{\eta_0 \cdot \bar{c}}{\sigma \cdot D_{hydr}} .$$

U.a. erhält man mit der Einschränkung, dass das Fördermedium BINGHAM'sches Fließverhalten zeigt, das Reibungsgesetz in der Form $Ha(Bm)$, das im Vergleich mit der meistens verwendeten Formulierung $\lambda(Re, Bm)$ eine Variable weniger aufweist und somit einzelne Einflüsse überschaubarer wiedergibt. Das Ergebnis

$$Ha = 48 \cdot \left[1 + \frac{Bm}{8} - \frac{2}{3} \frac{Bm^3}{Ha^2} \right] ,$$

schließt als Grenzfall auch das Reibungsverhalten NEWTON'scher Flüssigkeiten mit ein; denn für $Bm = 0$ (also $\tau_0 = 0$) folgt $Ha = 48$, d.h. der Druckverlust wird nur von $\eta_{pl} = \eta$ geprägt. Bei NEWTON -Fluiden genügt demnach die Angabe eines einzigen Zahlenwertes, um das Reibungsgesetz auszudrücken. Im Zahlenwert selbst spiegelt sich die Geometrie des Strömungsquerschnitts wieder.

Wie gezeigt, steht $Ha = 48$ für den ebenen, engen Spalt. Ist z.B. der Spalt mit $S/B = 1$ festgelegt, so findet man $Ha = 28$ und im Fall eines kreisrunden Strömungsquerschnitts gilt $Ha = 32$.

Die andere Grenze charakterisiert den Pfropfen als Fluidgebilde. Hierfür gilt $Ha = 4 \cdot Bm$. In diesem Fall ist die Fließgrenze τ_0 die einzige Stoffgröße, die den Druckverlust ausmacht. Im Gegensatz zum *NEWTON*-Fluid ist hier die Form des Strömungsquerschnittes ohne Bedeutung.

Das für den ebenen, horizontalen Spalt abgeleitete Reibungsgesetz kann auch zur Berechnung der treibenden Spiegeldifferenz Δh für die Strömung in einer Rinne, d.h. in einem oben offenen Spalt verwendet werden. In diesem Fall sind die jeweiligen Kennzahlen mit

$$D_{hydr} = 4 \frac{S \cdot B}{2 \cdot S + B} = 2 \frac{S}{\left(\frac{1}{2} + \frac{S}{B}\right)} \approx 4 \cdot S \quad \text{zu bilden. Die auf die Längeneinheit}$$

bezogene treibende Spiegeldifferenz erhält man damit zu

$$\frac{\Delta p}{\rho_B \cdot g \cdot L} = \frac{\Delta h}{L} = \frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{16 \cdot S^2} \frac{Ha}{\rho_B \cdot g} = \frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{\rho_B \cdot g \cdot S^2} \cdot 3 \left[1 + \frac{Bm}{8} - \frac{2 Bm^3}{3 Ha^2} \right] \quad (12)$$

bzw. in guter Näherung

$$\frac{\Delta h}{L} \approx \frac{3}{\rho_B \cdot g \cdot S} \cdot \left[\frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{S} + \frac{\tau_0}{2} \right]. \quad (13)$$

Ist nun aus fertigungstechnischen Gründen ein $\Delta h/L$ -Anliegen zu realisieren, so ist zu beachten, dass $\Delta h/L$ nicht beliebig reduziert werden kann; denn aus Gl.(13) folgt für kleine Bm -Zahlen sowie $\eta_{pl} \cdot \bar{c} \rightarrow 0$ die Grenzbedingung $\frac{\Delta h}{L} > \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\rho_B \cdot g \cdot S}$.

Im Falle schleichender Strömungsverhältnisse gilt $Ha = 4 \cdot Bm$ und somit

$$\frac{\Delta h}{L} = \frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{16 \cdot S^2} \frac{Ha}{\rho_B \cdot g} = \frac{\eta_{pl} \cdot \bar{c}}{4 \cdot \rho_B \cdot g \cdot S^2} \cdot Bm \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\Delta h}{L} \right)_{\min} = \frac{\tau_0}{\rho_B \cdot g \cdot S}.$$

Bedenkt man, dass bei Einhaltung des *Stabilitätskriteriums* [1] über den Zahlenwert von τ_0 nicht mehr verfügt werden kann, so ist mit Gl.(13) eine Möglichkeit zur Hand, die Größenordnung der plastischen Viskosität η_{pl} als Zielgröße festzulegen. Wegen der Unterschiede beim Einbau von Selbstverdichtendem Beton erscheint es ratsam, darüber hinaus das Produkt $\eta_{pl} \cdot \bar{c}$ zu betrachten.

Zur Abrundung der vorgestellten Ergebnisse ist es sinnvoll, eine weitergehende Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung – Gl.(6) – unter Einbeziehung der Kenngröße Kg zu verfolgen. Das kann schrittweise im Zusammenhang mit der Formulierung eines Reibungsgesetzes für strukturviskose Materialien erfolgen. Ebenso ist es außerordentlich wichtig, die Bewertung spezieller Geometriesimplexe (z.B. Bewehrung) vorzunehmen und in die Betrachtung einzubeziehen.

Bei vertikalem Spalt kommt zum analysierten Reibungsverlust ein geodätischer Hubanteil $\rho \cdot g \cdot H$ hinzu. In der Summe aus beiden ist das Gewicht der Einzelteile je nach Einbausituation recht unterschiedlich.

Weimar, 05.03.05 / rv

Verwendete Formelzeichen, Abkürzungen und Indices

a, A	[m ²]	lichter Strömungsquerschnitt
B	[m]	Kanal-Breite
c	[m/s]	Strömungsgeschwindigkeit
\bar{c}	[m/s]	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
D	[m]	charakteristische Kanalabmessung, hydraulischer Durchmesser
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigung
Δh	[m]	Spiegeldifferenz, -gefälle
H	[m]	Höhe
η	[Pa s]	dynamische Viskosität
$\eta_{pl.}$	[Pa s]	plastische Viskosität
$\dot{\gamma}$	[s ⁻¹], [-]	Schergefälle, Scherrate
σ	[Pa]	Spannung
l, L	[m]	Länge
λ	[-]	Reibungsbeiwert
n, y	[-]	Zeiger, Ordinate
p	[Pa]	Druck
Δp	[Pa]	Druckdifferenz
r, R	[m]	Radius einer Stromröhre
s, S	[m]	Spaltabmessung; Schalungsabstand
u, U	[m]	benetzter Umfang des Strömungsquerschnittes
τ	[Pa]	Schubspannung, Fließspannung
τ_0	[Pa]	(Schubspannung an der) Fließgrenze
ρ	[kg/m ³]	Dichte
ζ	[-]	Widerstandsbeiwert

Indices

$\ddot{a}q$	äquivalent	$pl.$	plastisch
$hydr.$	hydraulisch	0	im Abszissen-Nullpunkt