

R. Vogel

## Der Widerstand von kugelförmigen Teilchen $C_w(Re)$ in *NEWTON*-Fluiden

- Approximationen für ausgewählte *Re*-Bereiche -

### Vorbemerkung

Die Sinkgeschwindigkeit eines Teilchens in einem Fluid erhält man aus der Bilanz der wirkenden Kräfte. Die darin der Bewegung entgegen gerichteten Widerstands-Kräfte werden pauschal durch den Widerstandsbeiwert  $C_w(Re; Bm; etc.)$  fixiert. Für kugelförmige Teilchen in einem *NEWTON*-Fluid ist  $C_w(Re)$  bekannt und von *H. Schlichting*<sup>1)</sup> umfassend dokumentiert.

Im Bereich sehr kleiner *Re*-Zahlen, wo Zähigkeitskräfte dominieren, kann die Sinkgeschwindigkeit  $u$  ausschließlich an Hand der Stoffdaten aus der *Stokes*-Zahl in einfacher Weise aus

$$St = \frac{d g |\Delta\rho|}{\eta \frac{u}{d}} = 18 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{d^2 g |\Delta\rho|}{18 \eta} \quad \langle 1 \rangle$$

ermittelt werden. Ansonsten folgt aus dem Kräftegleichgewicht  $C_w \frac{\rho}{2} c^2 \frac{\pi}{4} d^2 = |\Delta\rho| g \frac{\pi}{6} d^3$

die Sinkgeschwindigkeit zu  $c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{d g}{C_w} \frac{|\Delta\rho|}{\rho}}$ .  $\langle 2 \rangle$

Mit  $C_w = 24/Re$  (nur für den *Stokes*-Bereich gültig) erkennt man, dass  $c \equiv u$  ist.

Eine Nutzung von Gl.⟨2⟩ setzt die Kenntnis von  $C_w(Re)$  voraus und zwar explizit. Daher wird im Folgenden versucht, diese vom *Stokes*-Erkenntnisstand ausgehend, zu fassen.

---

<sup>1)</sup> Grenzschicht-Theorie, Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1951, S. 51

## Die Ausgangsposition

Die nachfolgend zur Verfügung stehende Dokumentation von *Schlichting* /1/ wurde digitalisiert und bildet die Grundlage für alle mathematischen Interpretationen.

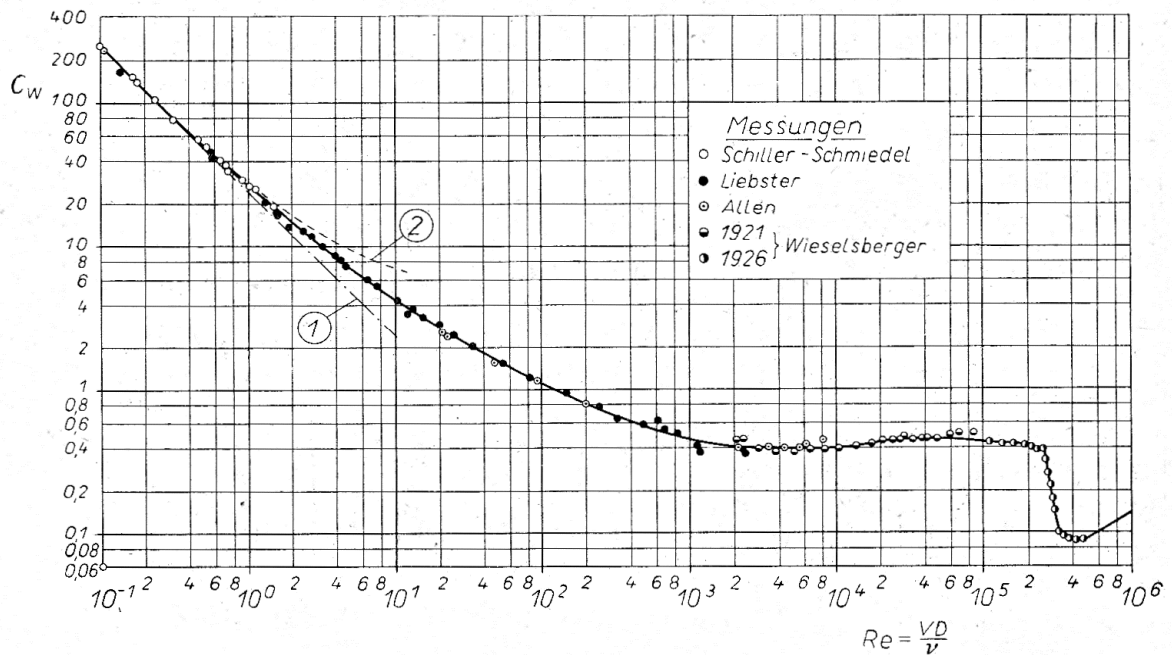


Abb.1 Der Widerstandsbeiwert von Kugeln in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl aus /1/.  
 Kurve (1) nach STOKES; Kurve (2) nach OSEEN.

Aus der einschlägigen Literatur sind zahlreiche Approximationen der *Schlichting*-Funktion bekannt /4/, die sowohl den gesamten Verlauf als auch nur Abschnitte mathematisch abbilden. Je nach Verwendungszweck stimmen dort Abbild und Original oft nur streckenweise oder gar nur punktuell überein.

## Sachverhalte und Ergebnisse

Wird der Widerstandsbeiwert  $C_w(Re)$  z.B. mit Hilfe von

$$C_w = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0,4 \quad ^2) \quad \text{in den Grenzen } 10 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5 \quad \langle 3 \rangle$$

beschrieben, so muss bedacht werden, dass dieser Ausdruck nur für eine grundsätzliche Orientierung geeignet ist, da er teilweise erheblich von der Realität abweicht.

<sup>2)</sup> A. Kaskas, Berechnung der stationären und instationären Bewegung von Kugeln in ruhenden und strömenden Medien, DA. TU. Berlin, 1964

Besteht die Absicht, eine Kugel-Kennlinie zu berechnen, müssen bessere Approximationen verwendet bzw. gefunden werden. Hierzu ist es hilfreich, anstelle von  $C_w(Re)$ , den Funktionsverlauf  $St(Re)$  zu nutzen. Diesen erhält man aus dem Kennzahl-Quotienten

$$C_w = \frac{4 St}{3 Re} \quad \text{mit der Lösung} \quad St = \frac{3}{4} C_w Re \quad (4)$$

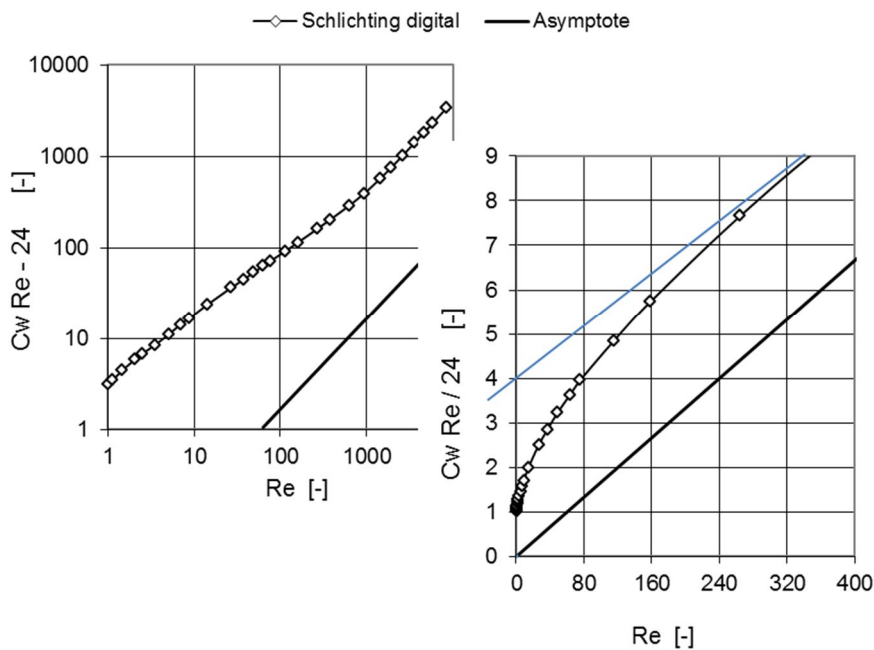
Diese allgemeine Aussage schließt im Speziellen mit ein

- $St = 18$  bei  $C_w Re = 24$  für sehr kleine  $Re$ -Zahlen, (5)

sowie andererseits für sehr große aus  $C_w \approx 0,4 = konst.$  folgend, die Asymptote

- $C_w Re \approx 0,4 Re$  bzw.  $St \approx \frac{3}{4} 0,4 Re = 0,3 Re$  . (6)

Die Proportionalität – Gl.(4) – heißt auch, dass eine Betrachtung von  $St(Re)$  durch  $C_w Re(Re)$  ersetzt werden kann. Beachtet man weiterhin die Aussagen Gl.(5), so werden mit einer Funktion  $(C_w Re - 24)(Re)$  die über den *Stokes*-Bereich hinaus wirkenden Kraftanteile erfasst. *Abb.2* zeigt das aus *Abb.1* resultierende Ergebnis. Aus der doppeltlogarithmischen Darstellung dieser Funktion



*Abb.2* Die digitalisierte *Schlichting*-Funktion in veränderter Gestalt  $(C_w Re - 24)(Re)$  sowie die Grafik  $(C_w Re / 24)(Re)$  mit realer und fiktiver Asymptote.

kann man ablesen, dass diese wenigstens abschnittsweise durch eine einfache Potenzfunktion beschrieben werden kann. Z.B. in Form von

$$C_w Re - 24 = 4 Re^{2/3} \quad \text{d.h.} \quad C_w = \frac{24}{Re} + \frac{4}{Re^{1/3}} = \frac{24}{Re} \left[ 1 + \frac{Re^{2/3}}{6} \right] \quad (7)$$

Akzeptiert man Abweichungen von der digital. *Schlichting*-Funktion bis zu +4% , so darf diese Beziehung bis zu  $Re \leq 800$  genutzt werden. Solche sowie vergleichbare Ausdrücke sind vielfach zu finden /4/5/, meist jedoch ohne Genauigkeitsangabe.

Weiterreichende Approximationen bis in den Asymptoten-Bereich bedürfen einer anderen Basis. Hierfür ist die relative *Stokes*-Zahl  $(St/18)(Re)$  von Nutzen, die in Gestalt von  $(C_w Re / 24)(Re)$  im rechten Bildteil von *Abb.2* zu finden ist. Schließt man vorerst den hauptsächlich durch Trägheitskräfte bestimmten Funktionsteil aus, ignoriert also

die ‚reale‘ Asymptote  $\frac{0,4}{24} Re$  , ersetzt sie durch eine fiktive mit der Steigung  $\frac{b}{24} Re$  , so kann

$\frac{C_w Re}{24} = 1 + \frac{b}{24} Re + a f(Re)$  Grundlage für eine Approximation sein. Legt man ihre Reichweite mit

$Re \approx 2000$  fest, so erhält man über den Schnittpunkt beider Asymptoten den Wert  $b = 0,35$  ; es bleibt eine Aussage zu  $a f(Re)$  . Nach Augenschein kommt hierfür u.a. eine  $\tanh$ -Funktion in Frage.

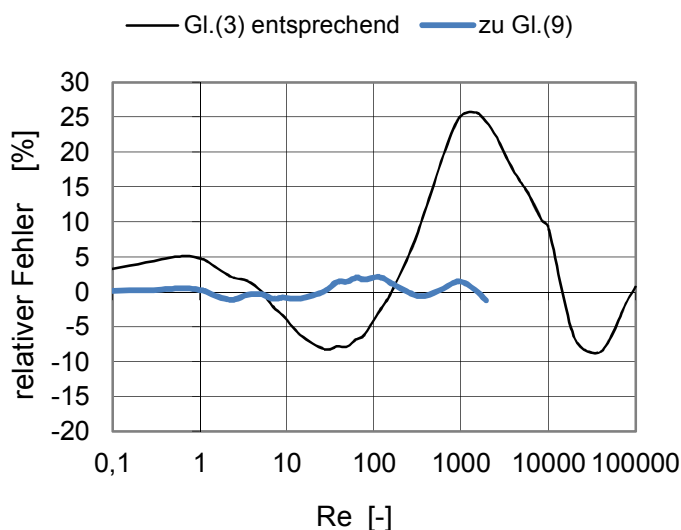
Eine schrittweise Annäherung an den *Schlichting*-Verlauf durch Variation der Funktionsparameter erhält man schließlich bis zu  $Re = 2000$  hin, eine Erweiterung der *Stokes*-Beziehung in Form von

$$\frac{C_w Re}{24} = \left[ 1 + \frac{0,35}{24} Re + 3 \tanh(0,042 Re^{2/3}) \right] = \frac{St}{18} , \quad \langle 8 \rangle$$

woraus letztlich der gesuchte Zusammenhang

$$C_w = \frac{24}{Re} \left[ 1 + 3 \tanh(0,042 Re^{2/3}) \right] + 0,35 \quad \langle 9 \rangle$$

folgt. Mit abnehmendem  $Re$  nähert sich diese Lösung der *Stokes*-Aussage, andererseits gibt sie mit dem Randwert  $C_w = 0,4$  die Gültigkeitsgrenze dieses Ausdruckes wider. D.h. Gl.⟨9⟩ ist für alle  $Re \leq 2000$  nutzbar.



Abb,3

Die relativen Abweichungen der Approximationsbeziehungen Gl.⟨3⟩ und Gl.⟨9⟩ von den in /1/ zusammengefassten experimentellen Befunden.

Die Genauigkeit der Approximation ist aus *Abb.3* ersichtlich. Danach liegen die relativen Abweichungen vom digitalisierten  $C_w$ -Verlauf bei max.  $\pm 2\%$ , also im Bereich der Digitalisierungsfehler. Mit *Abb.3* wird ebenfalls der relative Fehler von Gl.(3) angezeigt. Demgegenüber weist Gl.(9) eine erhebliche Verbesserung auf, wengleich der Gültigkeitsbereich unterschiedlich ist.

## Fazit

Die bekannte, vom *Stokes*-Postulat ausgehende, insgesamt experimentell belegte Beschreibung des Widerstands einer Kugel in *NEWTON*-Fluiden, wie sie in /1/ in Form von  $C_w(Re)$  festgehalten ist, kann sehr gut wie folgt mathematisch gefasst werden:

$$\text{Für alle } Re \leq 2000 \text{ gilt } C_w = \frac{24}{Re} \left[ 1 + 3 \tanh(0,042 Re^{2/3}) \right] + 0,35 \quad \langle 9 \rangle$$

$$\text{Für } Re \geq 2000 \text{ gilt } C_w = const. \quad \langle 10 \rangle$$

$$\text{im Speziellen } C_w = 0,4 \quad \text{für } 2 \cdot 10^3 \leq Re < 2 \cdot 10^4 .$$

Auf dieser Basis kann die stationäre Sinkgeschwindigkeit von kugelförmigen Teilchen bzw. die Steiggeschwindigkeit von Gasblasen in *NEWTON*-Fluiden mit Hilfe von Gl.(2) bestimmt werden.

Im Einzelfall kann es vorteilhaft sein, an Stelle von Gl.(2) den Ansatz Gl.(1) zu nutzen und dort für  $St = 18$  die Abhängigkeit  $St(Re)$  einzuführen.

Wird für den Bau von Gl.(9) anstelle der  $\tanh$ - gezielt eine  $\exp$ -Funktion verwendet, so erhält man unter gleichen Voraussetzungen bzw. Einschränkungen

$$C_w = \frac{24}{Re} \left[ 4 - \frac{3}{\exp(0,04 Re^{3/4})} \right] + 0,35 \quad \langle 11 \rangle$$

bei gleicher Gültigkeitsspanne  $Re \leq 2000$ .

Beide Approximationen – Gln.(9) und (11) – werfen die Frage nach dem Gewicht der Klammer-[ ]-ausdrücke auf. Bei großen  $Re$ -Zahlen beschränkt sich dieses auf den Zahlenwert ,4‘ und es darf vereinfacht

$$C_w = \frac{96}{Re} + 0,35 \quad \langle 12 \rangle$$

gesetzt werden. Dieses Resultat ist nur für den Bereich  $400 \leq Re \leq 2000$  annehmbar.

### Verwendete Formelzeichen, Abkürzungen und Indices

$c; u$	[m/s]	Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit
$C_W; C_D$	[-]	Widerstandsbeiwert
$d$	[m]	Teilchen-Durchmesser
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	Erdbeschleunigung
$a; b; m$	[-]	Faktoren
$Re$	[-]	<i>Reynolds</i> -Zahl
$St$	[-]	<i>Stokes</i> -Zahl
$\eta$	[Pa s]	Dynamische, <b>differentielle</b> Viskosität
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichte; Fluiddichte
$\rho_K$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Kugeldichte
$\Delta\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichtedifferenz ( $\rho_K - \rho$ )
$ \Delta\rho $	[kg/m <sup>3</sup> ]	Absolute Dichtedifferenz

### Literatur

- /1/ *Schlichting, H.* Grenzschicht-Theorie  
Verlag und Druck G. Braun Karlsruhe 1951, S.15
- /2/ *Stokes, G. G.* Cambridge Translation, IX (1851)
- /3/ *Kaskas, A.* Berechnung der stationären und instationären Bewegung von Kugeln in ruhenden und strömenden Medien  
Diplomarbeit T. U. Berlin 1964
- /4/ *Molerus, O.* Fluid-Feststoff-Strömungen  
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1982, S.3
- /5/ *Buhrke, H.* Strömungsförderer, Hydraulischer und pneumatischer Transport in Rohrleitungen  
*Kecke, H. J.*  
*Richter, H. .* VEB Verlag Technik Berlin, 1988