

R. Vogel

Zur Sedimentation von kugelförmigen Teilchen in Fluiden mit Fließgrenze ¹⁾

Teil I – Eine kritische Literaturrecherche mit dem Blick auf **Selbst-Verdichtenden-Beton** –

Vorbemerkung

Betrachtungen zur Sedimentation können von zwei verschiedenen Positionen aus erfolgen. Ist ein Trennen der Feststoffpartikel vom tragenden Fluid die technologische Absicht, so interessieren alle physikalischen Details der Bestandteile des Gemisches, die ein zügiges Separieren ermöglichen. Soll andererseits eine stabile Mischung auch bei guter Fließfähigkeit garantiert werden, so steht die Frage nach der noch zulässigen Verflüssigung des Gemisches im Vordergrund. Im ersten Fall ist die Blockade der Sedimentation die auszuschließende Randbedingung, im zweiten das nicht gewünschte Einsetzen einer Entmischung. Beide Vorgehensweisen beschreiben mit den Begriffen ‚Sedimentationsgrenze‘ bzw. ‚Stabilitätsgrenze‘ den gleichen physikalischen Sachverhalt. Durch die unterschiedlichen Betrachtungsweisen und Voraussetzungen initiiert, liegen die in der einschlägigen Fachliteratur zu findenden Angaben zum konkreten Zahlenwert dieses prägnanten Punktes weit auseinander.

Der im Untertitel zum Thema aufgeführte Komplex **Selbst-Verdichtender-Beton** wirft zusätzlich Fragen auf. Insbesondere interessiert, verbunden mit der bestmöglichen Fließfähigkeit, die prozesstechnisch erforderliche Stabilitätsgrenze dieses speziellen Fluids. Es ist also zu klären, unter welchen rheologischen Bedingungen wird dies erreicht. Welchen Anforderungen muss die Beton-Matrix genügen, um Gesteinskörner bestimmter Größe sicher zu tragen, um die Stabilität des Gemisches zu garantieren. Darüber hinaus soll der Frage nachgegangen werden, inwieweit Luftblasen unter diesen Umständen aus dem Frischbeton entweichen können.

Alle Bemühungen gelten folglich dem gesamten Bereich um die Sedimentationsgrenze, einerseits über eine systematische ‚Verdünnung‘ des Frischbetons bis nahe an einen Grenzwert, andererseits über die gezielte ‚Versteifung‘ eines Fluids, um Informationen zur Entmischung bzw. zur Wanderung von Luftblasen zu erhalten

Als Basis für physikalisch begründete Zusammenhänge dienen kugelförmige Teilchen, sowohl für den Zuschlag, als auch für die Luftblasen, die sich in einem *Bingham*-Fluid befinden. Da alle Betrachtungen nahe der Sedimentationsgrenze gelten sollen, dort extrem kleine Teilchengeschwindigkeiten die Regel sind, wird immer von einer **schleichenden** Kugelbewegung ausgegangen.

Die zum Thema gesichtete Literatur erhebt keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit. Das Literaturverzeichnis am Ende dieses Berichtes ist mehr oder weniger nur als Hinweis zu werten.

¹⁾ Vortrag zum 22. Regensburger Baustoffkolloquium, 06. März 2013. (Gekürzte Fassung)

Kräfte und Kenngrößen – Die Ausgangsposition

Der Widerstand, der einer fallenden Kugel widerfährt, kann man mit Hilfe der bekannten, experimentell vielfach belegten Funktion $C_W(Re)$ /1/ an Hand der Konvention $F_W = C_W \frac{\rho}{2} c^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ $\langle 1 \rangle$,

berechnet werden. Basis hierfür ist die *REYNOLDS*-Zahl $Re = \frac{c d \rho}{\eta}$ $\langle 2 \rangle$.

Speziell für eine **schleichende Bewegung** der Kugel in einem *NEWTON*-Fluid gilt die

einfache Aussage $C_W = \frac{24}{Re}$, $\langle 3 \rangle$. Da im Bereich $Re < 0,24$ mit $C_W > 100$

Trägheitskräfte eine untergeordnete Rolle ($\leq 1\%$) spielen, dominiert dort der Zähigkeitswiderstand.

Nach *Stokes* hat dieser die Größe $F_{St} = 3\pi d c \eta = 12 \eta \frac{c}{d} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ $\langle 4 \rangle$

Im Gleichgewicht mit der treibenden, um den Auftrieb reduzierten Schwerkraft,

$$F_M = \frac{\pi}{6} d^3 g |\Delta\rho| = \frac{2}{3} d g |\Delta\rho| \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \quad \langle 5 \rangle,$$

folgt aus $\frac{2}{3} d g |\Delta\rho| = 12 \eta \frac{c}{d}$ letztlich $\left[\frac{d g |\Delta\rho|}{\eta \frac{c}{d}} \right] = 18$. $\langle 6 \rangle$

Diese Kenngröße/-zahl soll *STOKES*-Zahl genannt werden. Der Wert $St = 18$ stimmt mit der Aussage $\langle 3 \rangle$ überein, hat jedoch den Vorteil einfacher Handhabe. Für die stationäre Sinkgeschwindigkeit folgt z.B. aus $\langle 6 \rangle$ abgeleitet

$$c = \frac{1}{St} \frac{d g |\Delta\rho|}{\frac{\eta}{d}} = \frac{d^2 g |\Delta\rho|}{18 \eta} \quad \langle 7 \rangle,$$

während sich aus $\langle 1 \rangle$ und $\langle 5 \rangle$ die übliche Schreibweise $c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{d g |\Delta\rho|}{C_W \rho}}$ $\langle 8 \rangle$

ergibt. Beide Ausdrücke liefern den gleichen Zahlenwert für c . Das erkennt man, wenn in $\langle 8 \rangle$ die Formulierung $\langle 3 \rangle$ eingesetzt und mit $\langle 2 \rangle$ verknüpft wird.

Zur Beschreibung der Kugelbewegung in *NICHT-NEWTON*-Fluiden sind, ihrem Habitus entsprechend, weitere Kennzahlen erforderlich. Beschränkt man sich vorerst auf die Fließgrenze als weiteres charakteristisches Merkmal, so muss diese in eine entsprechende dimensionslose Kenngröße eingebunden werden. Das könnte beispielsweise über die *BINGHAM*-Zahl $Bm = \frac{\tau_0 d}{\eta c}$ $\langle 9 \rangle$

geschehen. Anstelle von $\langle 3 \rangle$ müsste dann eine Funktion $C_W(Re; Bm)$ gefunden werden.

Eine mögliche Lösung wäre es auch, wenn analog zu $\langle 1 \rangle$, hier natürlich nur für schleichende Bewegung, über eine Konvention der Art

$$F_{W,x} = C_{W,x} \left(\tau_0 + \eta \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \quad \langle 10 \rangle$$

bekannte Versuchsergebnisse ausgewertet würden. Eine prägnante Beschreibung dieser Zusammenhänge liefert allerdings die *Stokes*-Zahl kombiniert mit einer *Fließ*-Zahl in Form von $St(FZ)$.

1. Der stabile Fluid-Teilchen-Verbund

Geht man davon aus, dass ein stabiler Frischbeton vorliegt, so vereinfacht sich <10> zu

$$F_{W,x0} = C_{W,x0} (\tau_0) \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \quad \langle 11 \rangle, \quad \text{und die Frage bleibt:}$$

Welcher Zahlenwert gehört zum Beiwert $C_{W,x0}$?

Aus dieser Sicht bringt die Literatur-Recherche das folgende Ergebnis :

Tafel 1

Zusammenstellung der gesichteten wissenschaftlichen Arbeiten, aufgeführt nach Erscheinungsjahr.

(Literatur-Details siehe Literaturverzeichnis am Ende des Berichtes).

| Gruppe | A | B | C |
|----------------|---|---|--|
| | | <p>Hill /1950/ Valentik /1965/ Ansley /1967/</p> <p>Mena /1987/ Dedegil /1987/ Atapattu /1990/</p> <p>Buchenau /2004/ Vogel /2005/</p> | <p>Beris /1985/</p> <p>Wünsch /1993/</p> |
| $C_{W,x0}$ [-] | 1 | π | 2 |

Danach gibt es einen deutlichen Unterschied im $C_{W,x0}$ -Wert sowie daran gebunden, eine mögliche Gruppenbündelung. Die spezifische Sichtung der einzelnen Gruppen führt meistens zu einem gleichen Ursprung.

Allein die Betrachtung des Kugelbildes, ganz gleich wie der Kugelschnitt $d^2\pi/4$ gelegt wird, lässt den Schluss zu, dass $C_{W,x0} = 1$ ein **unrealistischer** Wert ist. Alle darauf aufbauenden theoretischen Ansätze in **Gruppe A** müssen demnach zu fehlerhaften Resultaten führen.

Was kann man aus den Angaben der beiden anderen Gruppen folgern ?

Angemerkt sei, dass bei **Gruppe B** in der oberen Hälfte von *Tafel 1* Literaturstellen aufgeführt sind, die Grundlagen zum Sachverhalt ableiten sowie detaillierte Versuchsergebnisse wiedergeben, die von den Autoren im unteren Teil übernommen bzw. auch überarbeitet und ausgewertet wurden. Die Fragestellungen dort sind anderer Art.

Die Vorstellung der **Gruppe B** mit $C_{W,x0} = \pi$ basiert auf nachfolgender Modellvorstellung.

In *Abb.1* ist hierzu das Kräfteschema an einer Kugel abgebildet. Grundlage hierfür ist die Vorstellung, dass die Fließkraft als Reibungskraft oberflächenkonform verläuft und somit nur der vertikale Kraftanteil mit der reduzierten Schwerkraft in Beziehung zu bringen ist. Im Einzelnen gilt:

$$\sin \delta = \frac{r'}{r} = \frac{dF}{dT} \quad \widehat{b} = r \cdot \delta \rightarrow db = r \cdot d\delta .$$

Die wirksame Fließkraft beträgt damit

$$dT = \tau_0 \cdot dO = \tau_0 \cdot 2\pi r' \cdot db = \tau_0 \cdot 2\pi r \cdot \sin \delta \cdot r \cdot d\delta ;$$

und folglich der Vertikal-Anteil

$$dF = \sin \delta \cdot dT = \sin \delta \cdot \tau_0 \cdot 2\pi r^2 \cdot \sin \delta \cdot d\delta$$

bzw.

$$F = \tau_0 \cdot 2\pi r^2 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 \delta \cdot d\delta \cdot 2}_{=\pi/4} .$$

Mit der Integration dieses Ausdrucks erhält man den Fließ-Widerstand

$$F_F = \tau_0 \cdot 2\pi r^2 \cdot 2 \frac{\pi}{4} = \pi \tau_0 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \quad \langle 12 \rangle$$

wie in *Tafel 1* ausgewiesen.

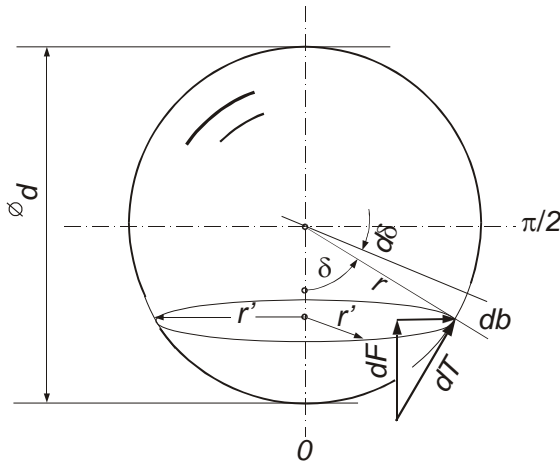


Abb.1 Schema zur Fließ-Kraft-Verteilung an der Oberfläche einer Kugel.

Stabiler Teilchen-Verbund heißt, dass Teilchen jede Ortsänderung des Fluid mitmachen, ohne sich im Fluid selbst zu bewegen.

Im Grenzfall herrscht also das Gleichgewicht *Fließkraft = red. Schwerkraft* .

Der Quotient aus beiden
$$\frac{F_F}{F_M} = \frac{3\pi}{2} \left[\frac{\tau_0}{d g |\Delta\rho|} \right] = 1 , \quad \langle 13 \rangle$$
 liefert einerseits mit dem

Klammerausdruck die Fließ-Zahl-Definition
$$\left[\frac{\tau_0}{d g |\Delta\rho|} \right] = Fz \quad \langle 14 \rangle ,$$
 andererseits mit

dem Zahlenwert
$$\frac{2}{3\pi} = Fz^* \quad \langle 15 \rangle$$
 die Stabilitätsgrenze des Verbundes, z.B. des

Frischbetons. Die damit festgelegte kritische Fließ-Zahl Fz^* basiert auf dem vorgestellten Kräfte-Modell und ist eine typische Aussage, ganz gleich in welcher anderen Form, der unter **Gruppe B** aufgelisteten Arbeiten.

Prüft man über den Kräftequotienten, wie mit Beziehung $\langle 13 \rangle$ geschehen, auch alle anderen Veröffentlichungen, so erhält man das in *Tafel 2* niedergeschriebene Ergebnis.

Danach liefert das Modell der **Gruppe B** den kleinsten Wert für die kritische *Fließ-Zahl*. Allerdings muss man anmerken, dass die Ausführungen und Angaben in den Arbeiten der **Gruppe C** nicht mit denen von *Tafel 2* übereinstimmen. Denn dort wird an Hand der finite-Elemente-Näherung ein

$$Fz^* = Fz \frac{F_M}{F_F}$$

Tafel 2

Angaben zur kritischen
 Fließ-Zahl und deren Basis.

| Gruppe | | A | B | C |
|--------|-----|----------------------------------|--|--|
| Fz^* | [-] | $\frac{2}{3} = 0,66\bar{6}$ | $\frac{2}{3\pi} = 0,212$ | $\frac{1}{3} = 0,33\bar{3}$ |
| F_F | [N] | $\tau_0 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ | $\pi \cdot \tau_0 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ | $2 \cdot \tau_0 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ |

Asymptoten-Wert $\frac{\beta}{3} = 0,0478 = Fz^*$ ermittelt. Wird dieses Resultat in unsere Betrachtungen einbezogen, so bleibt Autor bezogen die Feststellung $0,0478 \leq Fz^* \leq 0,66\bar{6}$. Ein solch extremer Unterschied um mehr als eine Zehnerpotenz weist auf fundamentale Schwächen im Ansatz hin. Im Einzelnen sei vermerkt:

Zu **Gruppe A**: Wie bereits oben ausgeführt, ist mit Bezug auf $C_{w,x0} = 1$ die Basis unrealistisch und damit auch der darauf aufbauende Fz^* -Wert.

Zu **Gruppe C**: Der Extrem-Wert $0,0478 = \beta/3$ ist der Tatsache geschuldet, dass bei der finite-Elemente-Aktion der wichtige Randwert, der sich aus der Fixierung der Fließkraft $F_F = 2 \cdot \tau_0 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ ergibt, außer Acht gelassen wurde. Dieser in /4/ verwendete Fließkraft Ausdruck führt zu $0,33\bar{3}$, wie in *Tafel 2* ausgewiesen.

Nimmt man diese kritische Betrachtung als Basis, so bleiben nur noch die beiden *Tafel*-Werte $0,212$ bzw. $0,33\bar{3}$ für die kritische Fließ-Zahl zur Wahl. Experimente könnten hier weiter helfen.

In allen Gruppen wird über gezielte Kugel-Fallversuche zur Stützung der jeweiligen Betrachtungen berichtet.

Die Messergebnisse von *O. Wunsch* /6/ aus **Gruppe C**, die $Fz^* = 0,0478$ belegen, sind unbrauchbar; da nicht nur für die Auswertung der Fallversuche, sondern auch zur Bestimmung der Stoffdaten (Rheogramme) der verwendeten Fluide, die *Beris*-Funktion /4/ genutzt wird. Das folgende Zitat deutet Zweifel an, jedoch fehlen die Schlussfolgerungen. Aus Dissertation *Wunsch* S.39 zu Bild 3.8

Man erkennt, daß die einzelnen Punkte recht gut auf der theoretischen Kurve liegen und dabei nur eine schwache Streuung aufweisen. Die Meßwerte sind also in sich konsistent. Natürlich ist dies kein scharfes Gütekriterium (schließlich wird der theoretische Verlauf in die Auswertung hineingesteckt). Doch unterstützt diese Überprüfung die Annahme, daß das Fließverhalten der hier betrachteten Fluide adäquat durch ein Bingham'sches Stoffmodell

...

Aus **Gruppe A** zeigt *Abb.2* Messungen von *A. Saak* /8/. Diese beschreiben das Eindringen bzw. Absinken einer Kugel in verschiedene(n) Fluiden mit Fließgrenze an Hand der relativen Eindringtiefe h/h' . Dem Zweck entsprechend wurden die einzelnen Versuchspunkte aus dem Original /8/ – *Fig.9*; S.433 – abgegriffen, digitalisiert, die Ordinatenwerte angepasst und der Koordinatenursprung unterdrückt wiedergegeben. Hinzugefügt und mit rot besonders hervorgehoben wurde der Sonderfall der Ordinate $h/h' = 0,863$, der quasi *eine an der Oberfläche klebende Kugel* markiert. Damit kann man erkennen und feststellen:

Die Mehrzahl der verwendeten Fluide verhindern, durch Oberflächen- und Fließspannung bedingt, ein Absinken der *14 mm-Kugel* auf den Boden des Flüssigkeitsbehälters. Wie man ablesen kann, verschwindet die Kugel erst ab $Fz < 0,4$ aus dem mit $h'/h = 0,863$ fixierten Oberflächenbereich.

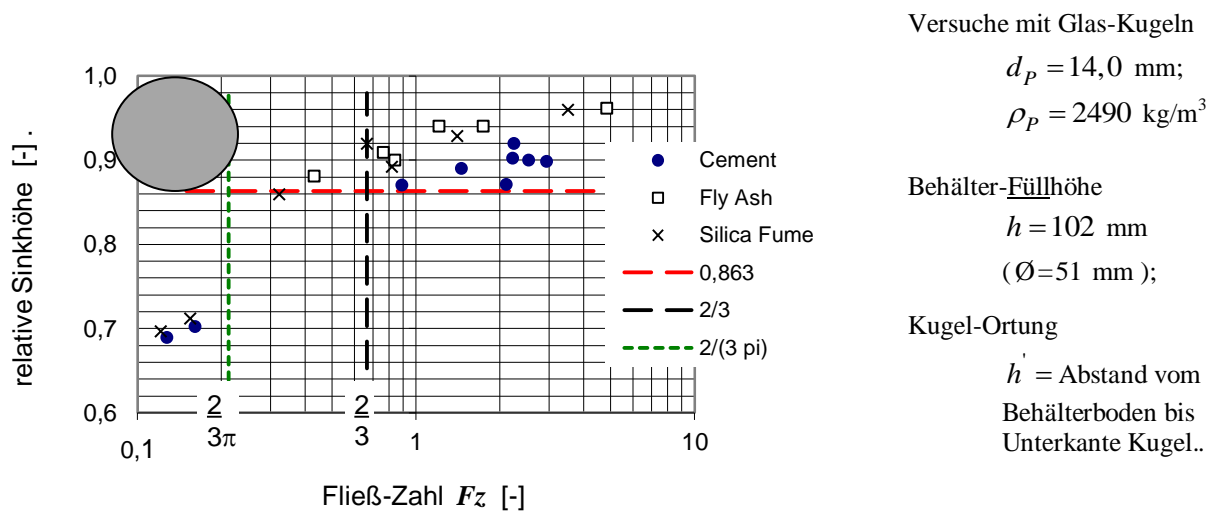


Abb.2 Basis dieser Grafik sind Versuchsergebnisse aus /8/

Die in /8/ mit $\tau_y / (r g \Delta\rho) \geq 4/3$ hergeleitete Sedimentationsgrenze, was $Fz^* \geq 2/3$ entspricht, gibt demnach den experimentellen Befund nur unzureichend wider. Sie ist zu hoch angesetzt.

Die für kleine *Fließ-Zahlen* experimentell bestimmten relativen Sinkhöhen der Kugel im Bereich $0,65 < h'/h < 0,8$ machen deutlich, dass $Fz^* = 2/3$ als Sedimentationsgrenze nicht nur zu hoch, sondern wesentlich zu hoch angesehen werden muss, denn ein Verharren der Kugel in diesem Behälterabschnitt kann nur auf Umstände zurückgeführt werden, die mit der/dem Versuchsdurchführung/-Aufbau zusammenhängen und auf nicht erfasste Kräfte hinweisen.

Ergänzt man *Abb.2* durch Versuchsergebnisse aus **Gruppe B**, z.B. mit solchen von *R. Vogel* /10/, die mit ähnlichen Materialien, jedoch unter Ausschaltung der Oberflächenspannung, ausgeführt

wurden, so liegt der Schluss nahe, dass eine realistische Abbildung der Stabilitätsgrenze mit $0,2 < Fz^* \leq 0,3$ gegeben ist. Mit diesem Bereich sind, zumindest aus theoretischer Sicht, auch von der Kugel abweichende Formen erfasst.

Zwischenbilanz

Die bekannten Versuchsergebnisse aus den Arbeiten der **Gruppen A + B** sowie die Kräfteanalyse der **Gruppe B** zeigen, dass Fluide mit Fließgrenze kugelförmige Teilchen stabil im Verbund halten können, wenn die kritische *Fließ-Zahl* den Wert $Fz^* \geq 0,212 (0,3)$ (16)

nicht unterschreitet. Die Abhängigkeit $\tau_0(|\Delta\rho|)$ in *Abb.3* spiegelt diese Aussage im Detail wider.

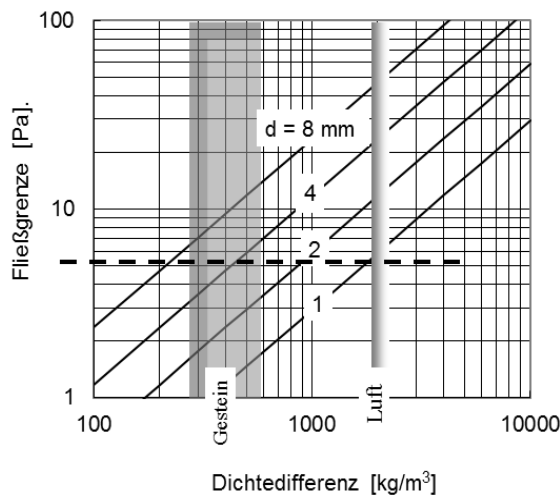


Abb.3 Die erforderliche Fließgrenze der Matrix in Abhängigkeit von Dichtedifferenz und maximaler Korngröße.

Da (16) einen Grenzwert fixiert, ist auch die dort angegebene Fließspannung ein Mindestwert, der eingehalten werden muss.

Beträgt die Dichtedifferenz zwischen Teilchen und Fluid (Beton-Matrix) z.B. in etwa 400 kg/m^3 und soll Korn mit max. $4 \text{ mm } \varnothing$ getragen werden, so ist $\tau_0 \geq 5 \text{ Pa}$ erforderlich. Mit der horizontalen Schnittpunktlinie (gestrichelt) erhält man zusätzlich eine Information über die Größe der zurückgehaltenen bzw. der aufsteigenden Luftblasen.

Nach *Abb.3* liegt diese bei rund $1 \text{ mm } \varnothing$. Da diese Aussage zur

Beton-Matrix und nicht zum Frischbeton mit beachtlich höherer Fließgrenze gehört, so ist klar, dass noch größere Luftblasen im Beton verbleiben.

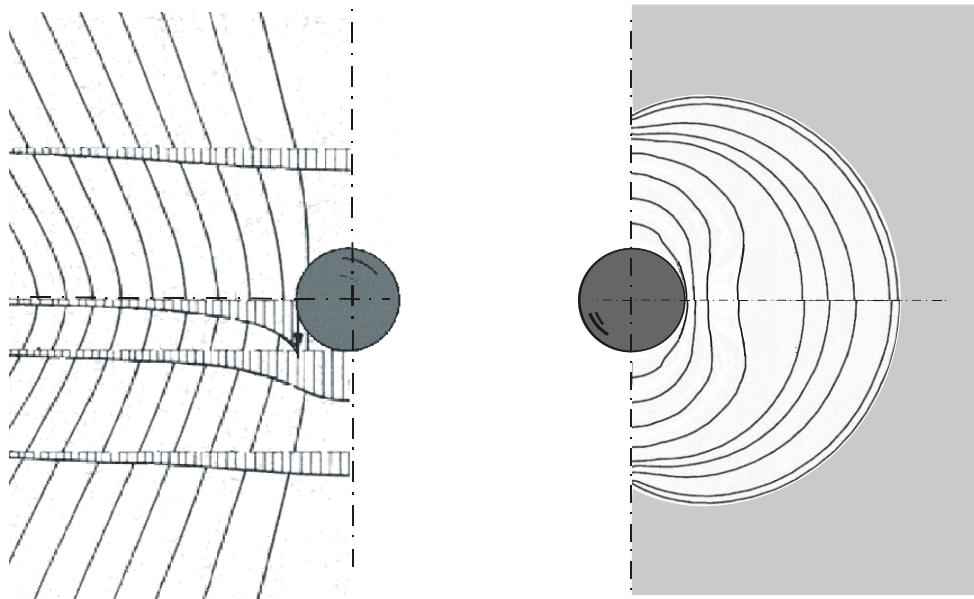
2. Sinkende Teilchen und aufsteigende Bläschen

Jenseits der Stabilitätsgrenze $Fz < 0,2$ wirkt außer der Fließkraft $\langle 12 \rangle$ die *Stokes-Zähigkeitskraft* $\langle 4 \rangle$ einer Bewegung der Teilchen entgegen. Dieser Bereich wurde schon vielfach experimentell belegt – in **Gruppe B** u.a. von *R-W. Ansley* /3/ – und in bekannter Weise als Funktion $C_w(Re; Bm)$ aufgezichnet. Dem Zweck der Untersuchungen entsprechend meist jedoch für $Re \gg 1$.

Wenn Trägheitskräfte eine untergeordnete Rolle spielen, sollte die Funktion $C_w(Re; Bm)$ durch eine der Art $St(Fz)$ ersetzt werden. Hierzu zeigt eine einfache Kräftebilanz den Weg.

$$\text{Aus } \frac{2}{3} d g |\Delta\rho| = \pi \tau_0 + 12 \eta \frac{c}{d} \quad \text{folgt.} \quad 1 = \frac{3\pi}{2} \cdot Fz + \frac{18}{St} \quad \langle 17 \rangle$$

allerdings wird in dieser Weise die Störung der *Stokes-Komponente* durch ihre Fließfeldumgebung nicht erfasst. Ein Blick auf die jeweiligen Strömungsfelder *Abb.4* macht deutlich, dass ein solcher Einfluss merklich ins Gewicht fällt.



a.) *NEWTON-Fluid* entsprechend /1/

b.) *BINGHAM-Fluid* in Anlehnung an /4/

Abb.4 Schematische Darstellung der Kugelumströmung

Rotationssymmetrisch zur Fallachse hinterlässt die Kugel Spuren. In einem *NEWTON-Fluid* laufen alle Ströme trichterförmig vor ihr her bzw. ihr nach und verlieren sich im Unendlichen. Das Strömungsfeld ist quasi nicht begrenzt. *Abb.4a* zeigt hierzu einen Ausschnitt mit dem Stromlinienverlauf und der Geschwindigkeitsverteilung.

Bei Fluiden mit Fließgrenze wird das Strömungsfeld durch diese begrenzt. Je größer die Fließspannung bzw. die *Fließ-Zahl* ist, umso kleiner ist das Strömungsfeld um die Kugel. In *Abb.4b* ist ein

gleich großer Ausschnitt des Systems Kugel-Fluid wie in *Abb.4a* gezeigt. Im Gegensatz zu dort ist das eigentliche Strömungsfeld wesentlich kleiner. Die schematische Darstellung enthält Linien gleicher Geschwindigkeit, die einem Rotationsellipsoid ähnlich, die Kugel umschließen. Im grau angelegten Feld ist die ‚Störung‘ durch die Kugel vollkommen abgeklungen. Die Einschränkung des Strömungsfeldes und damit der in einem engen Rahmen verlaufende Abbau der Strömungsgeschwindigkeit auf Null, ist das kennzeichnende Merkmal dieses Falles und ein Hinweis auf die bereits erwähnte Kräfte-Konstellation in $St(Fz)$. Eine Ergänzung von Ausdruck (17) muss demnach den Fließkrafteinfluss auf die Zähigkeitskraft wiedergeben. Z.B. in der komplexen Form :

$$1 = \frac{3\pi}{2} \cdot Fz + \frac{18}{St} + \left(\frac{3\pi}{2} \cdot Fz \right)^p \left(\frac{18}{St} \right)^q \quad \curvearrowright \quad St(Fz) \quad \langle 18 \rangle ,$$

letztlich unabhängig davon, welche Größe und welches Vorzeichen die Exponenten besitzen. Eine derartige Lösung erlaubt schließlich die Beantwortung der Frage nach der Bewegung von Teilchen in einem *Bingham-Fluid*, ganz gleich ob es sich um Gesteinskörner oder Luftblasen handelt. Denn es

gilt, wie bereits mit (7) ausgedrückt
$$c = \frac{1}{St(Fz)} \frac{d^2 g |\Delta\rho|}{\eta} \quad \langle 19 \rangle .$$

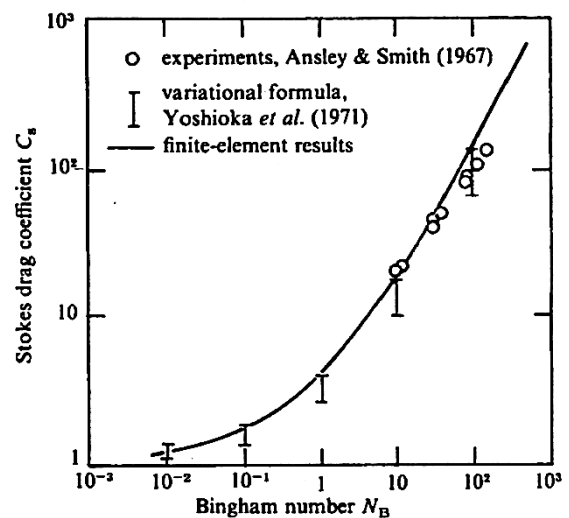
In **Gruppe C**, voran *A. Beris* und Mitarbeiter /4/, wird mit Hilfe einer finite-Elemente-Aktion versucht, die einschlägigen Differentialgleichungen schrittweise zu lösen. Das Ergebnis zeigt *Tafel 3*. Ergänzt wurde der Original-Wertesatz (grün hinterlegt) auf der Basis von

$$St = 18 \cdot C_S \quad \text{und} \quad Fz = Y_g / 3 \quad . \quad \text{außerdem gilt} \quad N_B = \frac{\tau_0 d}{\eta c} = Bm \quad .$$

Tafel 3

Finite-Elemente-Resultat aus /4/ ergänzt durch $St|Fz$ sowie entsprechende Grafik Figure 5 /4/S.230

| Aus Table 2 | | | Ergänzung | |
|-------------|-------|-------|-----------|--------|
| Y_g | N_B | C_S | St | Fz |
| [-] | [-] | [-] | [-] | [-] |
| 0 | 0 | 1 | 18 | 0,0000 |
| 0,001 | 0,007 | 1,17 | 21,1 | 0,0003 |
| 0,01 | 0,108 | 1,74 | 31,3 | 0,0033 |
| 0,036 | 0,747 | 3,46 | 62,3 | 0,0120 |
| 0,06 | 2,299 | 6,39 | 115,0 | 0,0200 |
| 0,088 | 8,047 | 15,24 | 274 | 0,0293 |
| 0,1 | 14,91 | 24,85 | 447 | 0,0333 |
| 0,11 | 27,36 | 41,45 | 746 | 0,0367 |
| 0,12 | 59,59 | 82,77 | 1490 | 0,0400 |
| 0,13 | 197,5 | 253,2 | 4558 | 0,0433 |
| 0,133 | 340,7 | 426,9 | 7684 | 0,0443 |
| 0,135 | 544,6 | 672,3 | 12101 | 0,0450 |



Mit Hilfe einer Approximation der Tafelwerte ist nach /4/ $C_S = 1 + 1,152 N_B + 1,874 \cdot \sqrt{N_B}$

Wird hierin die *Bingham-Zahl* durch $Bm = Fz \cdot St$ (20) ersetzt,

so folgt daraus (Druckfehler korrigiert) $\frac{St}{18} = 1 + 1,152 Fz \cdot St + 1,874 \cdot \sqrt{Fz \cdot St}$ (21).

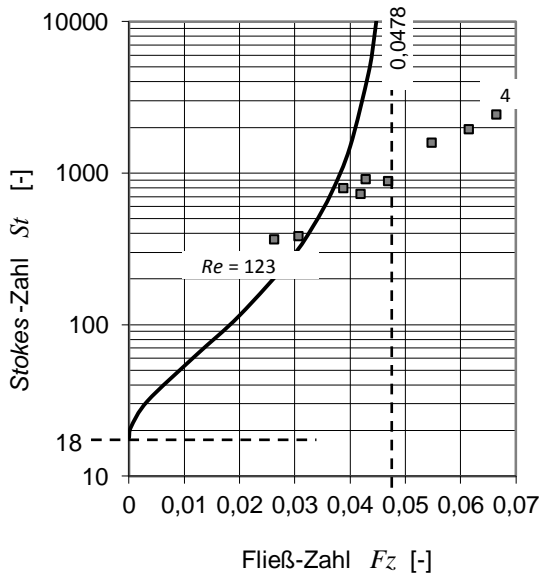
In /4/ wird die finite-Elemente-Lösung mit Versuchsergebnissen von *Ansley* /3/ – **Gruppe B** – verglichen und – siehe Figure 5 aus /4/ – eine passable Übereinstimmung festgestellt. Diese Beweisführung ist nicht korrekt und zwar in zweierlei Hinsicht:

Erstens besitzt die Darstellung $C_S(N_B)$ in der *Bingham-Zahl* die Duplizität (19), wie aus

$$C_S(N_B) = C_S(Fz \cdot St) \hat{=} St(Fz \cdot St) \text{ hervorgeht, und}$$

zweitens verletzen ausnahmslos alle Werte mit $4 \leq Re \leq 123$ die Bedingung $Re \ll 1$, die an die *schleichende Bewegung* geknüpft ist.

Zur Verständigung soll *Abb.5* beitragen, die die *Beris-Lösung* als $St(Fz)$ den *Ansley-Messungen* gegenüberstellt. Danach kann man nicht einmal von einer punktuellen Übereinstimmung sprechen,



denn im ‘Schnittpunkt‘ beider Funktionen weisen die *Ansley-Werte* etwa

$Re \approx 100$ aus. Der gegebene *Reynolds-Zahl-Bereich* der Versuchspunkte ist mit den beiden Eckwerten 4 sowie 123

markiert. In *Abb.5* ist ebenfalls die zum Funktionsverlauf gehörende Asymptote

$Fz^* = 0,0478$ eingetragen. Allein der Vergleich mit den *Ansley-Werten* zeigt den bestehenden Widerspruch und letztlich wie fern die *Beris-Lösung* der Realität liegt.

Abb.5 Die Funktion $St(Fz)$ nach den Werten von *Tafel 4* und Versuchsergebnisse von *Ansley* /3/

Auch Experimente von *L. Valentik* /2/, ebenfalls **Gruppe B**, die gelegentlich im Vergleich /6/ verwendet werden, sind hier

fehl am Platze. Sie bilden Kugeln in *Herschel-Bulkley-Fluiden* ab, die sich wesentlich von *Bingham-Fluiden* unterscheiden und darüber hinaus auch die *Reynolds-Bedingung* nicht einhalten. Die Einordnung dieses Fluid-Typs wird an anderer Stelle behandelt.

Zwischenbilanz

In allen drei Gruppen – **A**; **B** sowie **C** – werden theoretische und experimentelle Ergebnisse zur Sedimentation von Teilchen in Fluiden mit Fließgrenze – insbesondere in *Bingham*-Fluiden – mitgeteilt, einerseits in Form von $C_W(Re; Bm)$, andererseits als $St(Fz)$.

Die Ergebnisse von **Gruppe B** als $C_W(Re; Bm)$ sind in erster Linie nicht zur Deutung von Vorgängen im Bereich *schleichender Strömung* gedacht. Sie erfüllen folglich die *Reynolds*-Bedingung nicht. Außerdem sei angemerkt, dass die allgemein übliche, dort geübte Praxis, das Zähigkeitsglied in der *Reynolds*-Zahl /3;5/ sowie zusätzlich in /5/ den Widerstandsbeiwert C_W zu manipulieren, nicht nützlich ist. Löst man solche Resultate im Sinne von $St(Fz)$ auf, so stellt man eine Verletzung von $Fz^* = 0,212$ fest.

Soweit erfassbar sind in *Abb.6* die einzelnen Funktionen $St(Fz)$ gegenübergestellt. Es sind ebenfalls die Asymptoten eingetragen sowie ein grau hinterlegtes Feld, welches den unter *Kapitel I.* abgesteckten stabilen Verbund von Teilchen und Fluid markiert.

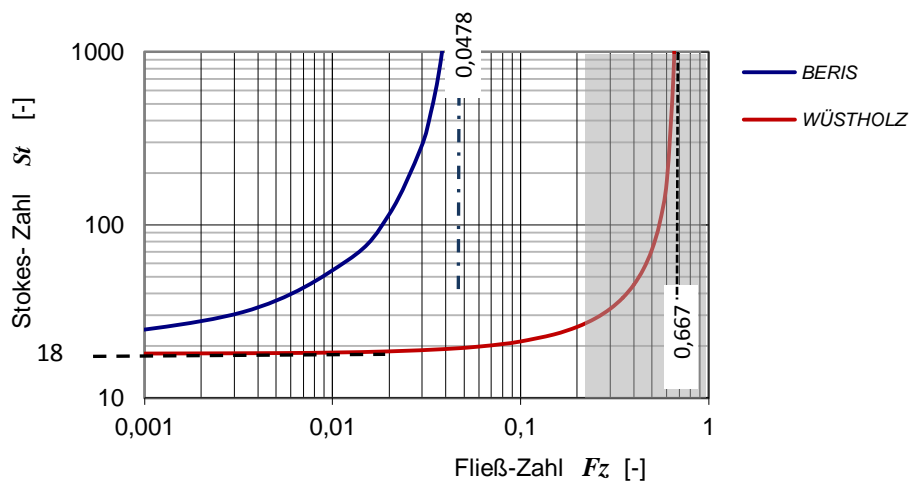


Abb.6 Vergleich der Funktionsverläufe $St(Fz)$ und ihre Grenzen

Beide Funktionen haben den gleichen Ursprung mit $St = 18$. Beide verletzen den anzustrebenden Randwert $Fz^* = 0,212$. Der Wert von *A.N. Beris* /4/ liegt wesentlich unter diesem Fixpunkt, der von *T. Wüstholtz* /9/ darüber. Bei der von *Wüstholtz* deklarierten Funktion

$$St = \frac{18}{1 - \frac{3}{2}Fz} \quad (22)$$

kommt noch hinzu, dass der wichtigste Bereich der Funktion vom Feld des stabilen Verbunds überdeckt wird, also Teilchen sich dort überhaupt nicht bewegen können.

Bezieht man $C_W(Re; Bm)$ mit ein, so muss man feststellen, dass es mit keiner Funktion möglich ist,

im Bereich $0,02 \leq Fz \leq 0,2$ die Sinkgeschwindigkeit von Teilchen bzw. die Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in Fluiden mit Fließgrenze mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen (auch nicht näherungsweise).

3. Resümee

Anliegen der vorliegenden Studie war es, Informationen über die Stabilität von Schüttgut-Fluid-Gemischen – insbesondere von Selbstverdichtenden Beton – zu erhalten, ebenso darüber, wie sich in diesem speziellen Medium grobe Teilchen und Luftblasen verhalten. Wird diese Thematik auf das Verhalten von kugelförmigen Teilchen in Fluiden mit Fließgrenze abstrahiert, so kann man festhalten:

- Der Strömungswiderstand von Kugeln in *NEWTON*-Fluiden ist für einen weiten *Reynolds-Zahl* -Bereich hinreichend theoretisch und experimentell belegt und gesichertes Wissen. Für **schleichende** Strömungsverhältnisse besitzt die kennzeichnende *Stokes-Zahl* die Größe $St = 18$.
- Der Kenntnisstand zur Kugelumströmung bzw. der Bewegung von Kugeln in *NICHT-NEWTON*-Fluiden mit Fließgrenze ist unbefriedigend.

Mit Hilfe der im vorliegenden Manuskript erläuterten dimensionslosen Kenngrößen kann das Sedimentieren von kugelförmigen Teilchen in Fluiden mit Fließgrenze beschrieben werden. Die Quotienten aus *um den Auftrieb reduzierter Schwerkraft* und *Zähigkeitskraft* einerseits, sowie aus *Fließkraft* zu *red. Schwerkraft* andererseits, bilden das Fundament hierzu.

Ein stabiler Fluid-Teilchen-Verbund wird bei großen *Fließ-Zahlen* Fz erreicht. Als kritischer Wert, bei dem Sedimentation einsetzen kann, kann $Fz^* = 2/(3\pi)$ angesehen werden. Ansonsten wird der Strömungsverlauf um die Kugel im Bereich $0 \leq Fz \leq Fz^*$ sowohl von der *Fließ-Zahl*, als auch durch die *STOKES-Zahl* bestimmt.

Bei kleineren *Fließ-Zahlen* kann über den funktionellen Zusammenhang $St(Fz)$ die Sinkgeschwindigkeit von Teilchen aber auch die Aufsteiggeschwindigkeit von Luftblasen in Fluiden mit Fließgrenze berechnet werden. Allerdings gibt die gesichtete Literatur nur unzureichend Anhaltspunkte hierfür. Diese Lücke wird in einer folgenden Arbeit geschlossen.

Verwendete Formelzeichen, Abkürzungen und Indices

| | | | |
|----------------|----------------------|--|---|
| β | [-] | Konstante /4/ | |
| c | [m/s] | Geschwindigkeit | |
| $C_w ; C_D$ | [-] | Widerstands-Beiwert (Drag coefficient) | |
| d | [m] | Durchmesser | |
| δ | [\angle°] | Winkel | |
| F | [N] | Kraft | |
| F_z | [-] | Fließ-Zahl | |
| F_z^* | [-] | Grenzfließ-Zahl $= \frac{2}{3\pi}$ | Entspricht der bekannten Stabilitäts-Kennzahl Λ für SVB |
| g | [m/s ²] | Erdbeschleunigung | |
| h | [m] | Höhe | |
| m | [kg] | Masse | |
| $\dot{\gamma}$ | [s ⁻¹] | Schergefälle, Scherrate | |
| η | [Pa s] | Dynamische, differentielle Viskosität | |
| O | [m ²] | Oberfläche | |
| r, R | [m] | Radius | |
| Re | [-] | Reynolds-Zahl | |
| ρ | [kg/m ³] | Dichte | |
| $ \Delta\rho $ | [kg/m ³] | Absolute Dichtedifferenz | |
| St | [-] | Stokes-Zahl | |
| T | [N] | Tangentialkraft | |
| τ_0 | [Pa] | (Schubspannung an der) Fließgrenze | |

Kenngrößen

Indices

| | | | | | |
|------------|-----|---------------|---|------|----------------|
| $Bm ; N_B$ | [-] | Bingham-Zahl | $\frac{\tau_0 d}{\eta c}$ | F | Fließ |
| F_z | [-] | Fließ-Zahl | $\frac{\tau_0}{d g \Delta\rho }$ | Fl | Fluid |
| Re | [-] | Reynolds-Zahl | $\frac{c d \rho_{Fl}}{\eta}$ | K | Kugel |
| St | [-] | Stokes-Zahl | $\frac{d g \Delta\rho }{\eta \frac{c}{d}}$ | M | Masse (Schwer) |
| | | | | St | Stokes |
| | | | | W | Widerstand |
| | | | | Z | Zement |

Literatur

- /1/ *Schlichting, H.* Grenzschicht-Theorie
Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe 1951, S. 13-16 und 80-84
- /2/ *Valentik, L.*
Whitmore, R. L. The Terminal Velocity of Spheres in Bingham Plastics
Brit. J. Appl. Phys., Vol. 16 (1965), pp. 1197-1203
- /3/ *Ansley, Ralph W. ;*
Smith, Terence N. Motion of Spherical Particles in a Bingham Plastic
AIChE Journal Vol.13 (1967) No.6, S. 1193-1196
- /4/ *Beris, A. N.*
Tsamopoulos, J. A.
Armstrong, R. C.
Brown, R. A. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic
J. Fluid Mech. Vol. 158 (1985), pp. 219-244
- /5/ *Dedegil, M. Y.* Drag Coefficient and Settling Velocity of Particles in Non-Newtonian Suspensions
Journal of Fluids Engineering (1987) Vol. 109, S. 319-323
- /6/ *Wünsch, O.* Schwingungsinduzierte Sedimentation in viskoplastischen Fluiden
Diss. 1993, Universität der Bundeswehr Hamburg, S. 5-40
- /7/ *Dontula, P.*
Macosko, C. W. Yield Stress in OrbitzTM
Rheology Bulletin, V.68, No.1, 1999, pp. 5-6
- /8/ *Saak, A. W.*
Jennings, H. M.
Shah, S. P. New Methodology for Designing Self-Compacting Concrete.
ACI Materials Journal/November-December 2001, S. 429-439
- /9/ *Wüstholtz, T.* Experimentelle und theoretische Untersuchungen der Frischbetoneigenschaften von Selbstverdichtendem Beton.
Diss. 2005, Uni Stuttgart, S. 93-107
- /10/ *Vogel, R.* Zur Tragfähigkeit von Fluiden,
Mitteilung 04/5
Ein Stabilitätskriterium für Selbstverdichtenden Beton
BFT 12/2005, S. 42-49 o.a. Mitteilung 05/2
- /11/ *Buchenau, G.* Die rheologischen Eigenschaften eines Selbstverdichtenden Betons mit Steinmehlen.
Diss. 2004, TU Berlin, S. 28-31